Systems Neuroscience
& Neurotechnology Unit

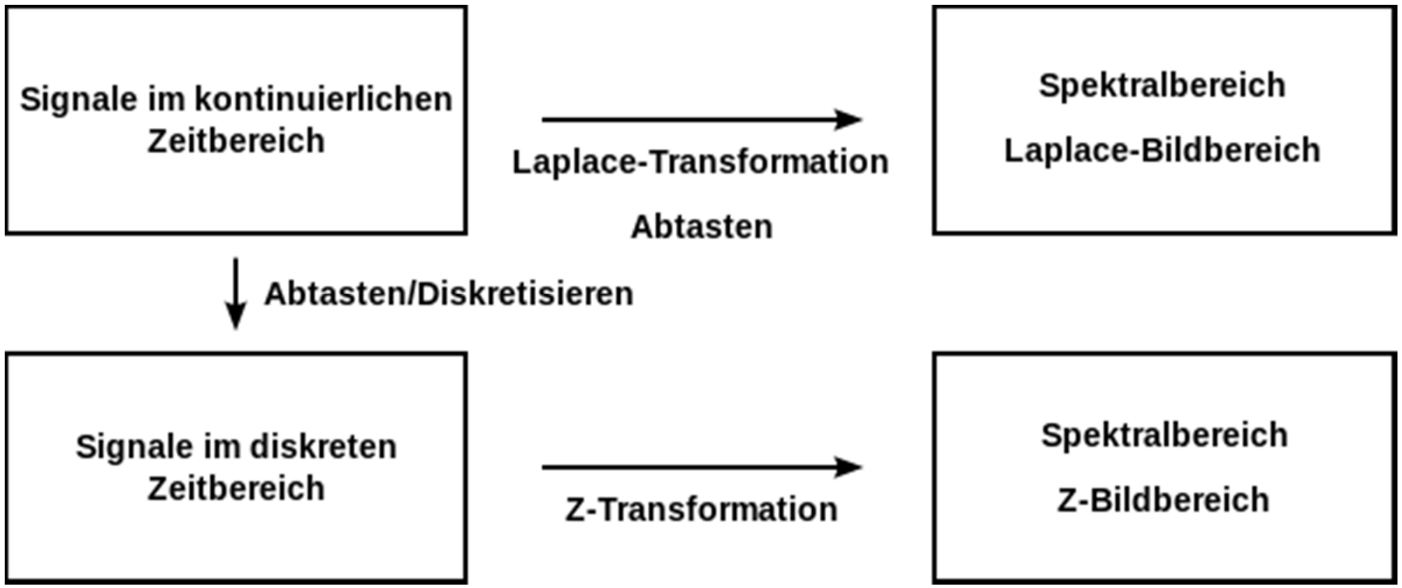
Z-Transformation und DTFT

27.07.2015

J. Kristof Schubert, M. Sc.

Z-Transformation

- wandelt ein zeitdiskretes Signal im Zeitbereich in ein komplexes diskretes Signal im Frequenzbereich um.
- Analogon zur Laplace-Transformation zeitkontinuierlicher Signale



Z-Transformation

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$z = Ae^{i\varphi} = a + ib$$

Ausgewählte Eigenschaften:

Linearität $Z(ax[n] + by[n]) = aZ(x[n]) + bZ(y[n])$

Faltung $Z(x[n] * y[n]) = Z(x[n])Z(y[n])$

Z-Transformation

- $Z\left\{x\left[n\right]\right\} \in \mathbb{C}$, d.h. darstellbar in der komplexen Ebene
- charakterisiert das komplette diskrete System bzw. Signal
- es existiert ein Konvergenzradius (ROC = region of convergence)
- Z-Transformierte kann geometrisch gedeutet bzw. analysiert werden

Z-Transformation

$$Z\left\{x[n]\right\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad n \in \Box$$

$$Z\left\{x[n]\right\} = X\left(Ae^{i\varphi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] A^{-n} e^{-in\varphi}$$

$$\downarrow$$

$$|z| = A = 1$$

$$\downarrow$$

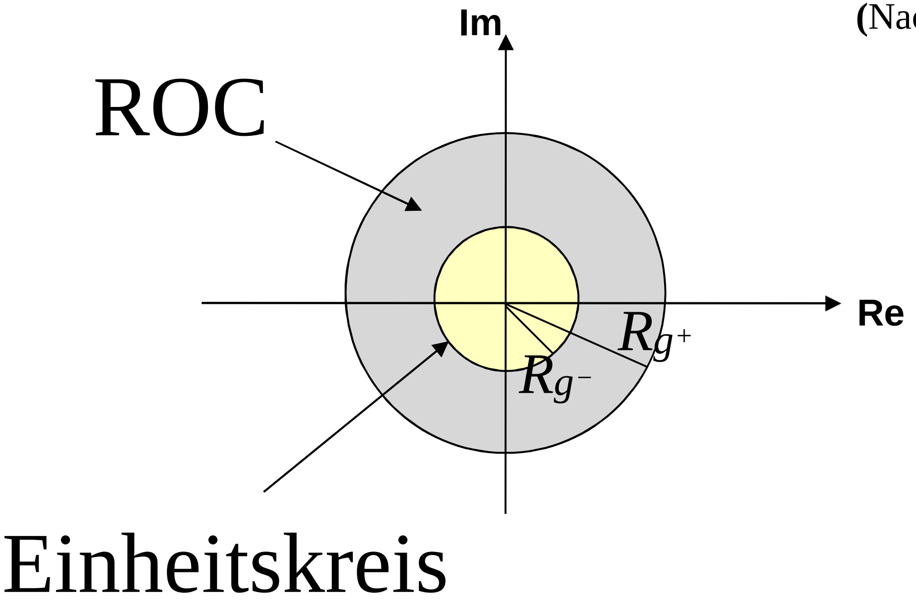
$$Z\left\{x[n]\right\} = X\left(e^{i\varphi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-in\varphi} \ \Box \ DTFT$$

Z-Transformation

- Konvergenz der Transformation hängt von der Wahl von **|z|** ab
- Bereich in der komplexen Ebene, in der die Transformation konvergiert, heißt

  ROC = region of convergence
- für Konvergenz von FT muss ROC den Einheitskreis ($|z|=1$) beinhalten

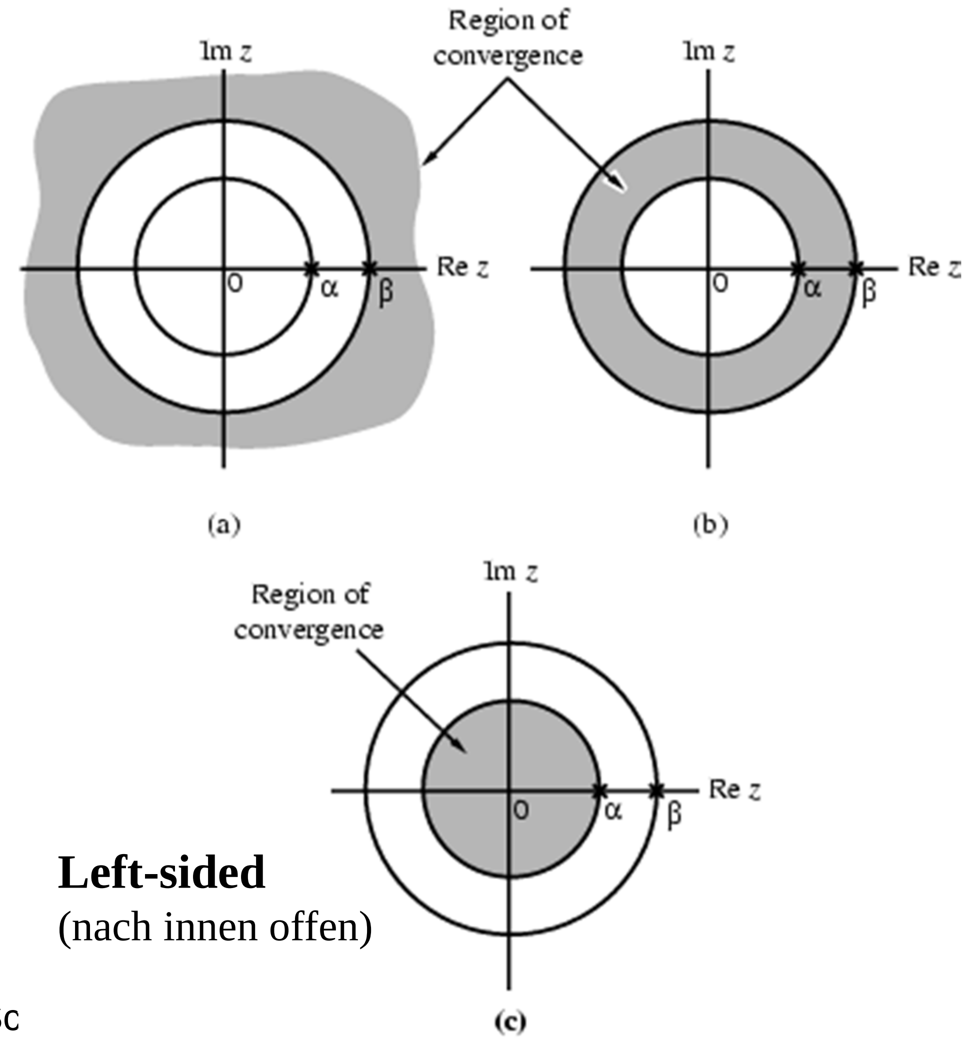
Z-Transformation



Right-sided
(Nach außen offen)

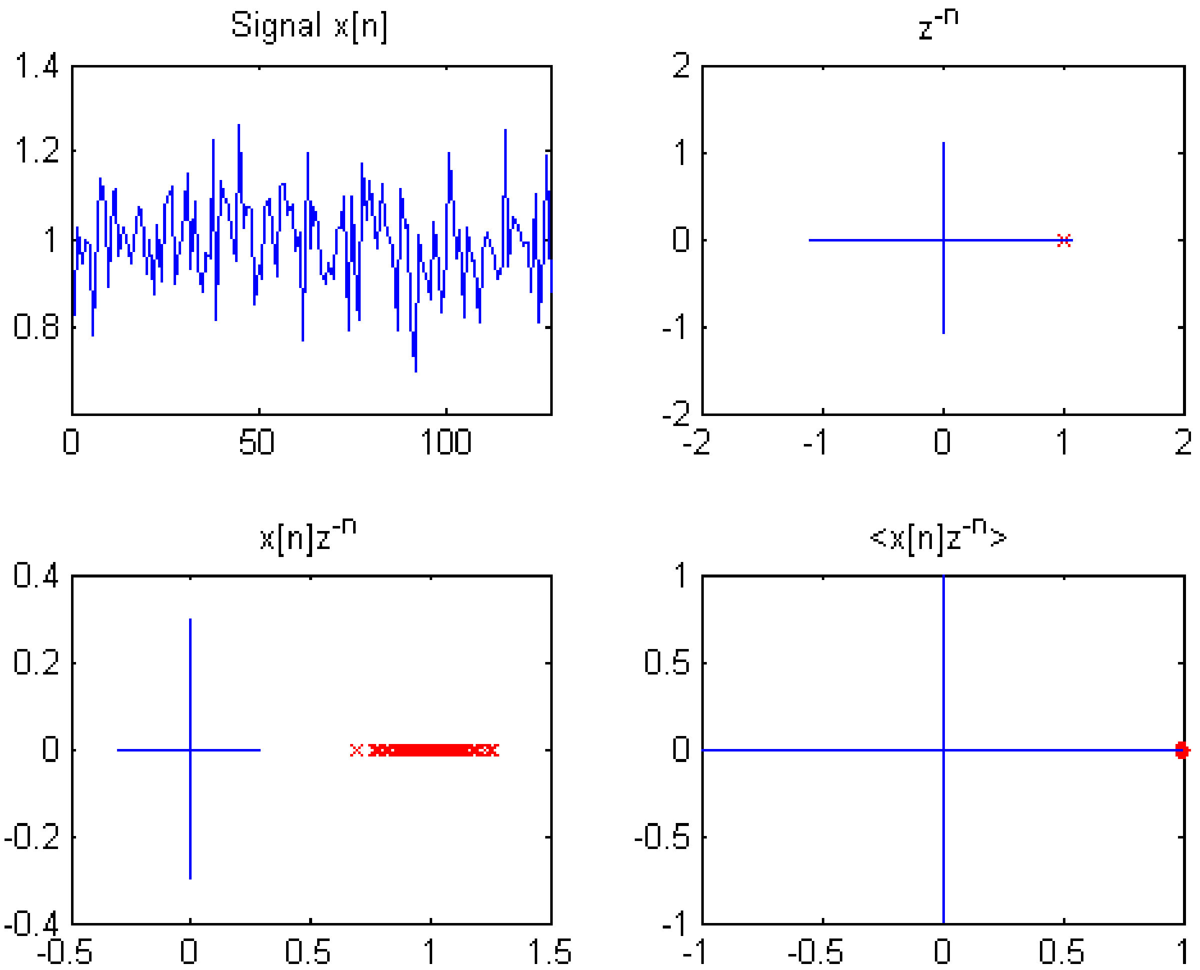
Two-sided
(Ringform)

Left-sided
(nach innen offen)



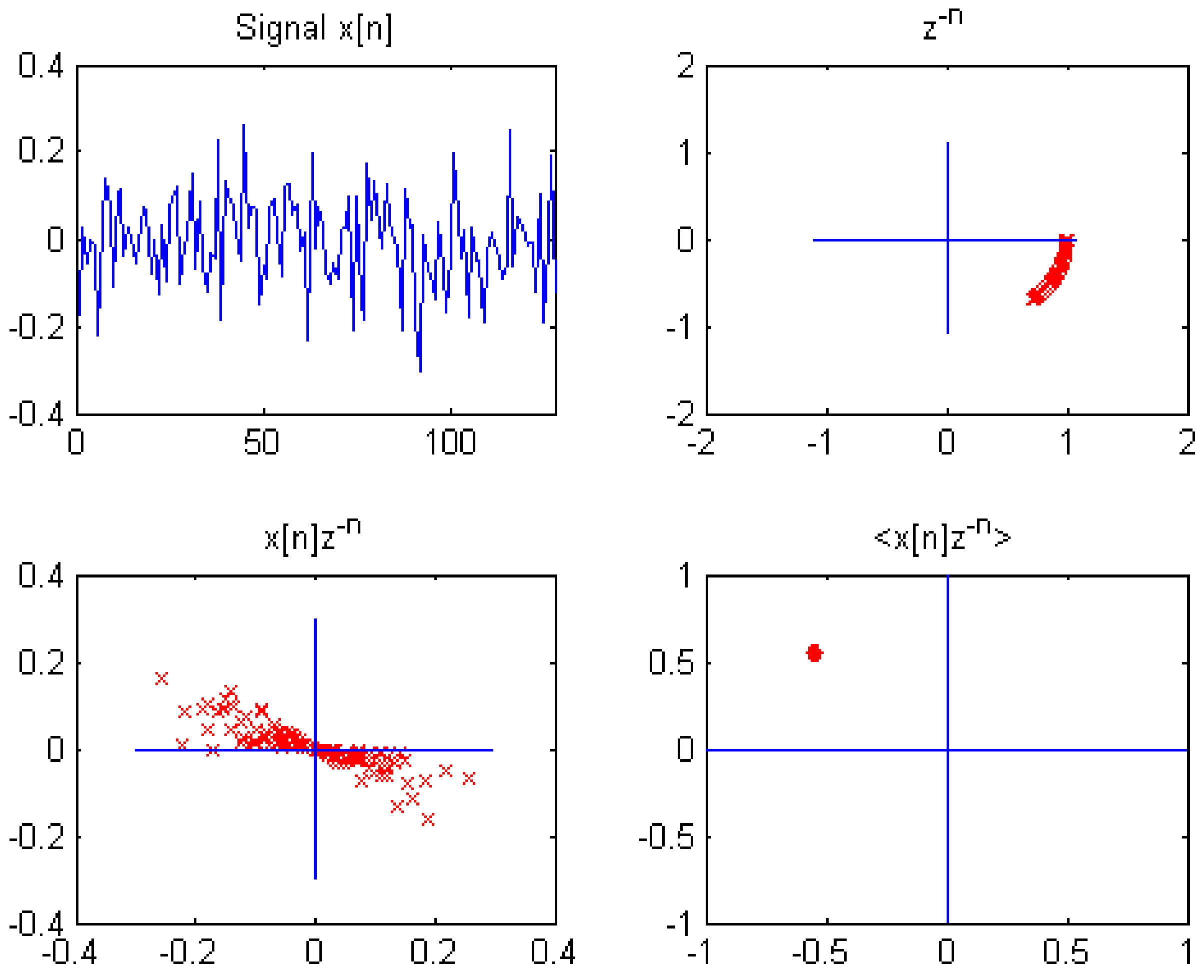
Z-Transformation

$z = 1$



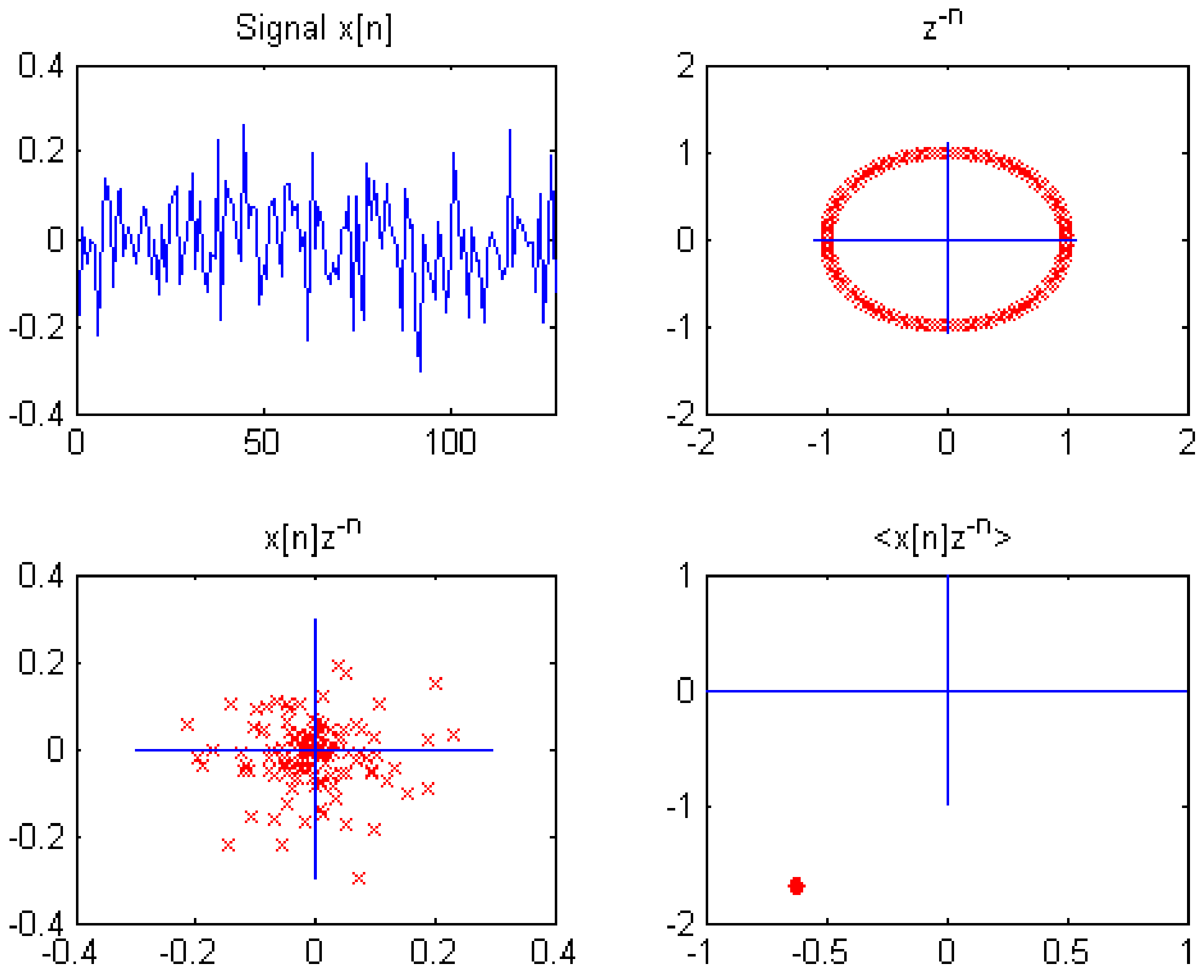
Z-Transformation

$$z = e^{i\varphi}$$

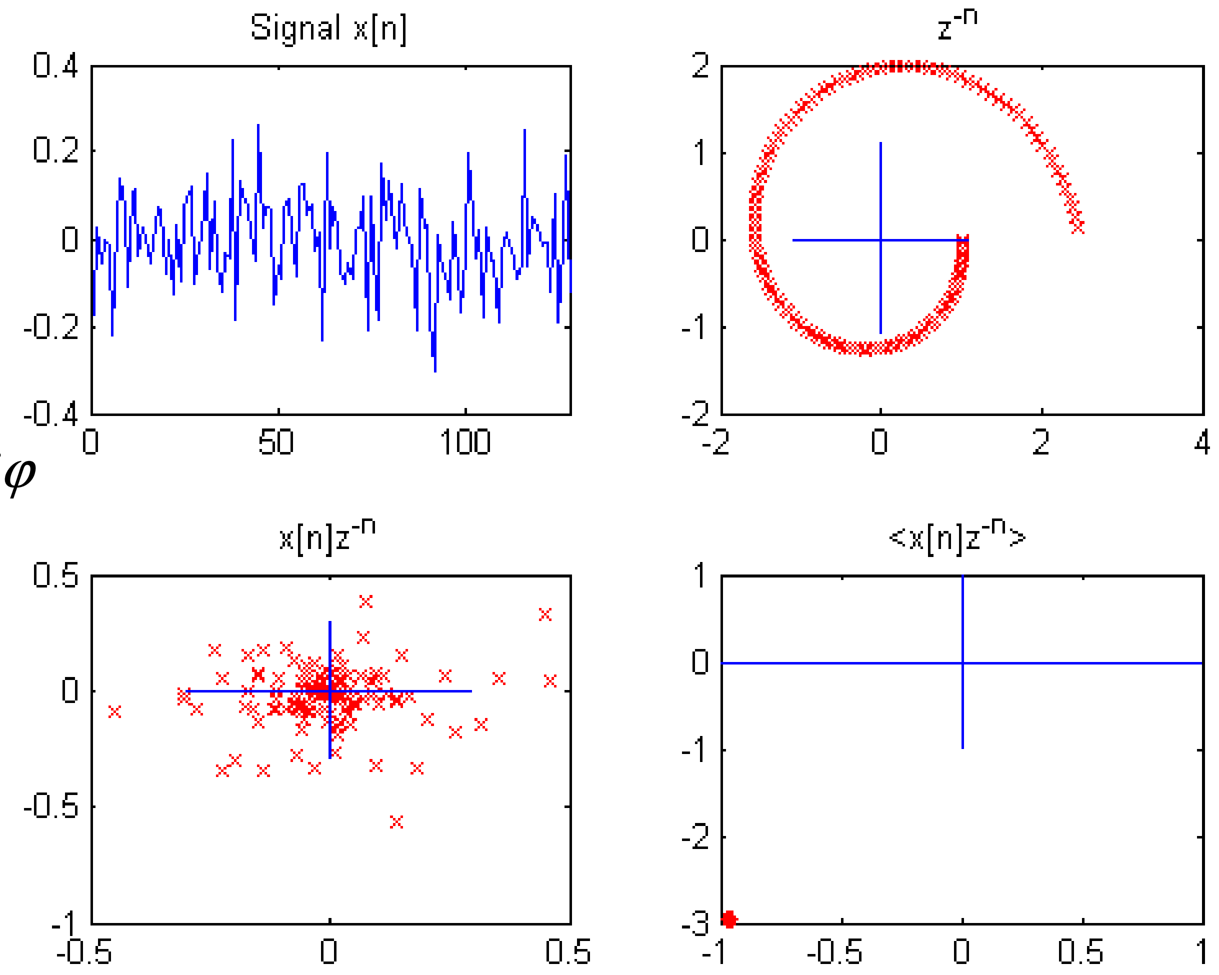


Z-Transformation

$$z = e^{i\varphi}$$



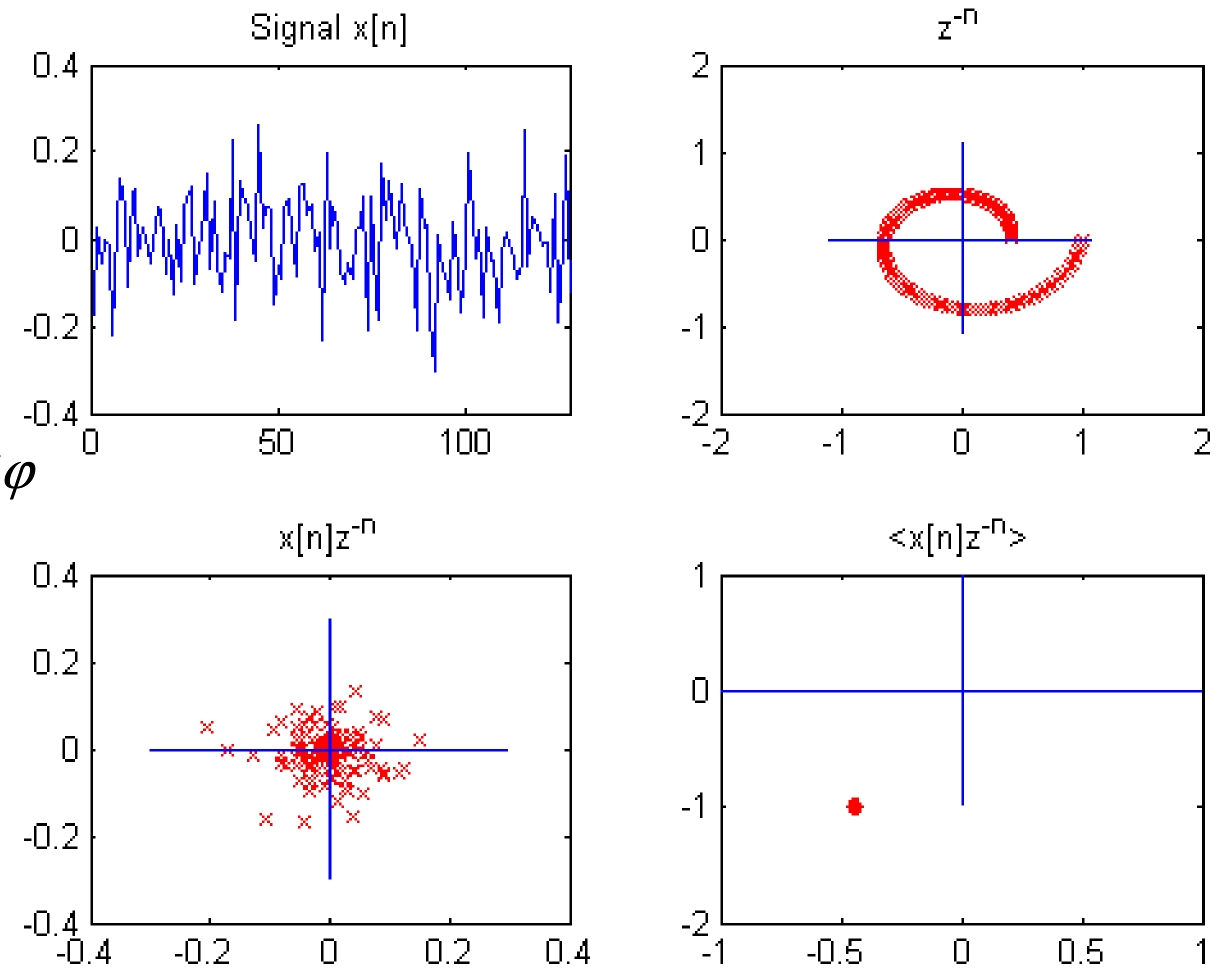
Z-Transformation



$$z = Ae^{i\varphi}$$

$$A < 1$$

Z-Transformation



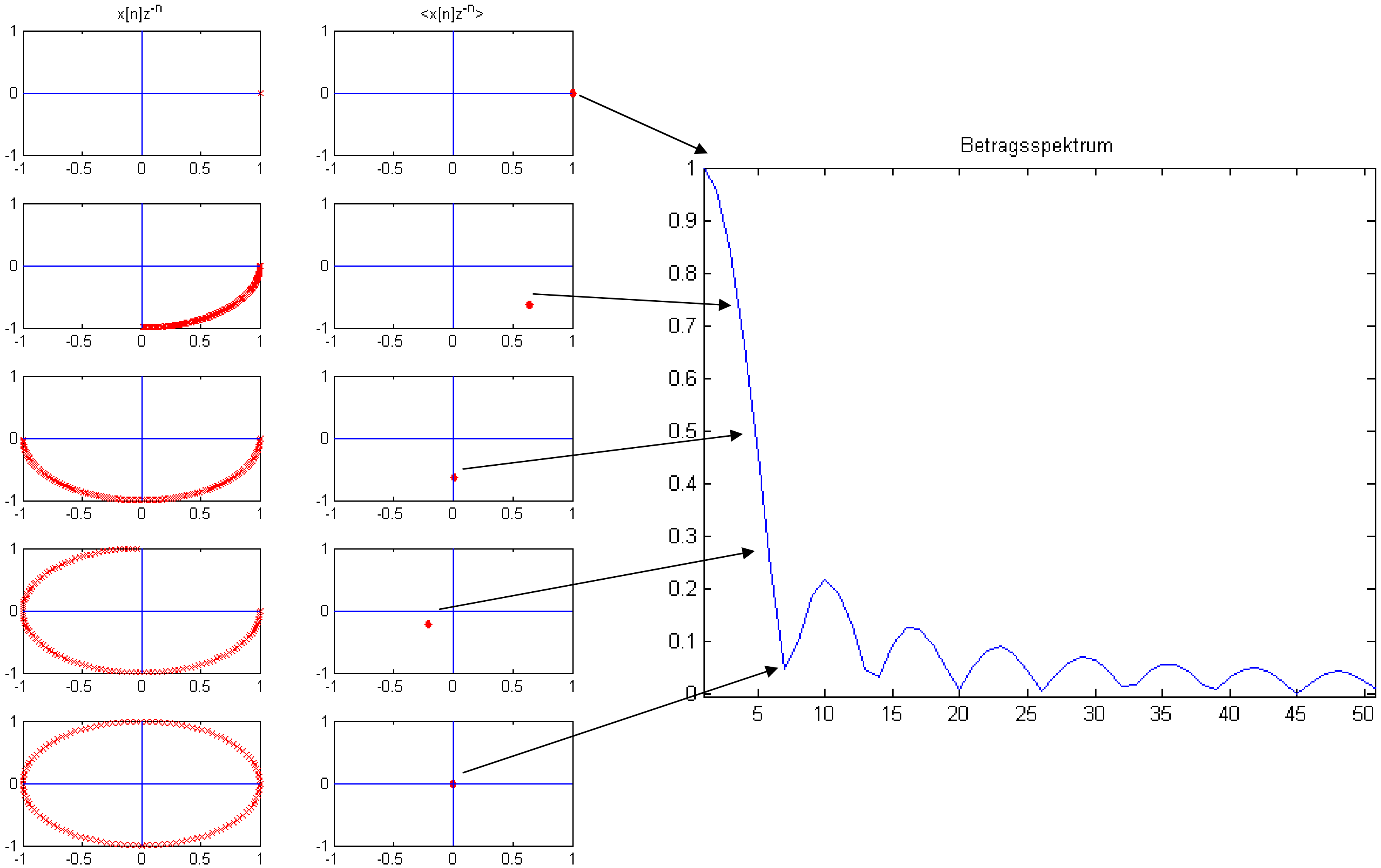
$$z = Ae^{i\varphi}$$

$$A > 1$$

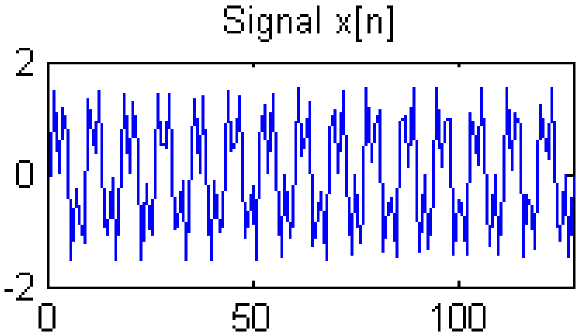
Z-Transformation

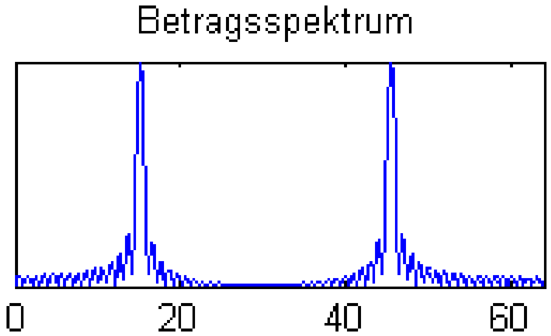
- für z innerhalb des Einheitskreises ist die Transformation eher sensitiv für das Ende des Signals
- für z außerhalb des Einheitskreises eher für den Beginn des Signals
- für z auf dem Einheitskreis = DTFT
- → keine spektrale Lokalisation möglich!

DTFT

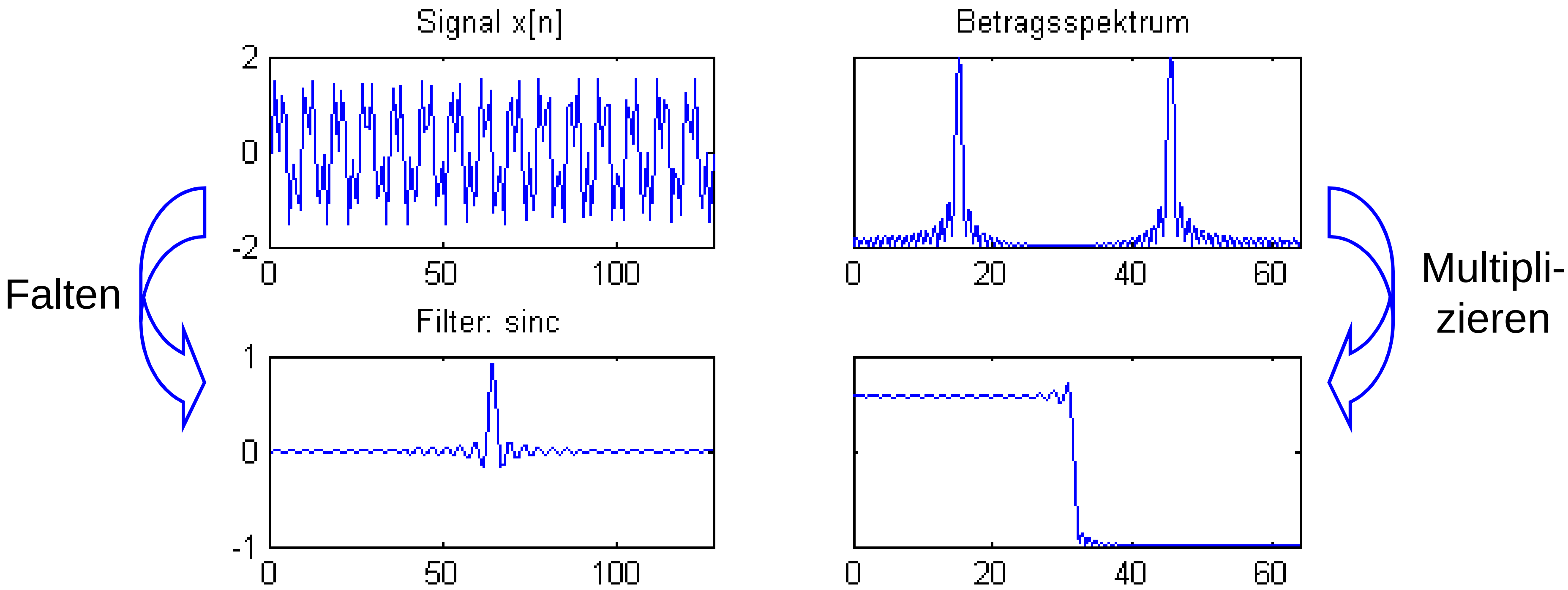


Z-Transformation: Filter





Z-Transformation: Filter



Z-Transformation: Filter